9

Tema 1

1	2	3	4	Calificación
B/B	R/B/B	R+/B/B	B	9

6 HOJAS

Lógica y Computabilidad – Primer Parcial

1er Cuatrimestre de 2018 – 1/6/2018

1. Sean ϕ el conectivo ternario dado por $\phi(p,q,r) = p \to (q \to \neg r)$ y ψ el conectivo binario dado por $\psi(p,q) = ((p \vee q) \to \neg p) \wedge p$.

   a) Decidir si el conjunto $\{\phi\}$ es adecuado.

   b) Decidir si el conjunto $\{\psi\}$ es adecuado.

2. Decimos que un conjunto de fórmulas de la lógica proposicional Γ es *discreto* si para cada fórmula $\varphi \in \Gamma$ existe una valuación v que hace verdadera a φ y falsas a todas las demás fórmulas de Γ. Decidir y demostrar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   a) Si Γ es discreto, entonces es satisfacible.

   b) Si Γ es discreto e infinito, entonces es insatisfacible.

   c) Si Γ es discreto e infinito, entonces $\Gamma' = \{\neg\varphi : \varphi \in \Gamma\}$ es satisfacible.

3. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad tal que $\mathcal{C} = \{c\}$, $\mathcal{F} = \{q, *\}$ y $\mathcal{P} = \{P, =\}$, donde q es un símbolo de función unaria, $*$ un símbolo de función binaria y P un símbolo de predicado unario. Sea φ la expresión

$$\forall x \forall y \forall z \Big(\big(y = q(x) \wedge z = q(x * c)\big) \to \exists w \big(\neg P(w) \wedge w * y = z\big)\Big).$$

   a) Probar que φ es una fórmula mediante el siguiente procedimiento:
      - identificar todos los términos que aparecen en φ y mostrar cadenas de formación de los que no sean variables o símbolos de constantes;
      - identificar las fórmulas atómicas que aparecen en φ;
      - partiendo de las fórmulas atómicas, dar una cadena de formación para φ.

      ¿Es φ un enunciado?

   b) Sea $\mathcal{I} = \langle \mathbb{Z}, 1, q_{\mathcal{I}}, +, P_{\mathcal{I}} \rangle$ una interpretación, donde $q_{\mathcal{I}}(x) = x^2$ y $P_{\mathcal{I}}(x) \leftrightarrow x$ *es par*. Calcular $V_{\mathcal{I}}(\varphi)$ e indicar si $\mathcal{I}$ es un modelo para φ.

   c) Mostrar un modelo de $\neg\varphi$. ¿Es φ universalmente válida? ¿Es una contradicción?

4. Dado el conjunto de enunciados de primer orden

$$\Gamma = \{\forall x \exists y P(x,y)\ ,\ \forall x(P(c,x) \to P(x,c))\}\,,$$

   donde c es un símbolo de constante y P un símbolo de predicado binario, si $\varphi = \exists x P(x,c)$, probar usando árboles que $\Gamma \models \varphi$.

Justificar todas las respuestas.

Empezar cada ejercicio en hoja nueva. Numerar y poner nombre a todas las hojas.

① $\phi(p,q,r) = p \Rightarrow (q \Rightarrow \neg r)$
$\psi(p,q) = ((p \vee q) \Rightarrow \neg p) \wedge p$

a) Para demostrar que $\{\phi\}$ es adecuado, me basaré en que el conjunto $\{\neg, \Rightarrow\}$ es adecuado. Para ello, definiré ambos conectivos como función de ϕ. Si ϕ puede formar los conectivos $\neg$ y $\Rightarrow$, puede formar cualquier otro (por transitividad). Equivalentemente, se puede ~~...~~ inducir cualquier función booleana con una fórmula sólo con "ϕ".

P	¬P	$\phi(P,P,P) = P \Rightarrow (P \Rightarrow \neg P)$
1	0	0 ✓
0	1	1 ✓

Ya Teniendo el conectivo "$\neg$", lo usaré para formar "$\Rightarrow$". Sabemos que puede reducirse a $\phi(P,P,P)$.

P	Q	$Q \Rightarrow P$	¬P	¬Q	$\phi(\neg P,Q,Q) = \neg P \Rightarrow (Q \Rightarrow \neg Q)$
1	1	1	0	0	1 ✓
1	0	1	0	1	1 ✓
0	1	0	1	0	0 ✓
0	0	1	1	1	1 ✓

Quod erat demonstrandum.

NOTA

Anulado

b) Para ver que $\{\psi\}$ <u>no es adecuado</u>, probaré que no es posible inducir una función booleana $f:\{0,1\}\to\{0,1\}$ definida como $f(x)=$, usando una fórmula formada únicamente por variables (será una sola porque f es de dominio en $\{0,1\}$) y conectivos "ψ".
En otras palabras, no puede construirse una fórmula equivalente a $p \;\; \neg p = \alpha$.

<u>Caso base</u>: $C(\alpha)=0$

$\alpha = p_i$ es variable prop.
Si $v(p_i)=0$, luego $v(\alpha)=0$.
No induce a la f que decimos. ✓

<u>Paso inductivo</u>: $C(\alpha)=n>0$

$\alpha = \psi(\beta_1,\beta_2) = (\beta_1 \vee \beta_2 \Rightarrow \neg\beta_1) \wedge \beta_1$
Sea v la valuación que cumple $v(p_i)=0 \;\; \forall p_i \in Var$.
$v(\alpha) = v((\beta_1 \vee \beta_2 \Rightarrow \neg\beta_1) \wedge \beta_1) =$
más

b) Para ver que $\{\psi\}$ <u>no es adecuado</u>, probaré que toda fórmula α que tenga sólo el conectivo ψ es contradicción. Así, no podría formarse el conectivo "$p \wedge q$", por ejemplo, ya que se debería usar algún conectivo porque no es suficiente con las variables sueltas, y el único conectivo disponible sería ψ.

Caso base: $C_\psi(\alpha) = 1$ (comp. medida en # de ψ).

$$\alpha = \psi(P_1, P_2) = ((P_1 \vee P_2) \Rightarrow \neg P_1) \wedge P_1$$

P_1	P_2	$P_1 \vee P_2$	$\neg P_1$	$((P_1 \vee P_2) \Rightarrow \neg P_1) \wedge P_1$
1	1	1	0	0 ✓
1	0	1	0	0 ✓
0	1	1	1	0 ✓
0	0	0	1	0 ✓

$\Rightarrow \alpha$ es contradicción.

Paso inductivo: $C_\psi(\alpha) = n > 0$

$$\alpha = \psi(\beta_1, \beta_2) = ((\beta_1 \vee \beta_2) \Rightarrow \neg \beta_1) \wedge \beta_1$$

Como β_1 y β_2 son de $C_\psi(\beta_1)$, $C_\psi(\beta_2)$ menor, cumplen la H.I. y son contradicciones.

Sea v una valuación cualquiera:

- $v(\alpha) = \min\{v((\beta_1 \vee \beta_2) \Rightarrow \neg \beta_1), \underbrace{v(\beta_1)}_{=0}\} = 0$ ✓

Luego, α es contradicción.

Luego, las fórmulas que tienen sólo conectivos "ψ" son contradicciones, y no podrían ser equivalentes a una arbitraria.

Quod erat demonstrandum

¡Muy bien!

② $\Gamma \subset F$ es discreto si para cada $\varphi \in \Gamma$ hay una valuación v / $v(\varphi)=1$ y $v(\alpha)=0$ para todas las otras $\alpha \in \Gamma$.

a) Falso. Contraejemplo: $\Gamma = \{p_1, \neg p_1\}$
v satisface p_1 sii no satisface $\neg p_1$.
Es trivial que cumple la propiedad, pero no es satisfacible (también trivial: $p_1 \wedge \neg p_1$ es contradicción).

b) Falso. Contraejemplo: $\Gamma = Var = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$
Para toda $\gamma \in \Gamma$, si $\gamma = p_i$ puedo definir la valuación v como $v(p_j)=1$ sii $p_j = p_i$ (es decir, cero para toda variable que no es p_i). Si encontré una valuación que hace verdadera a una fórmula de Γ y falsas a todas las demás, para cada fórmula de Γ, luego Γ es discreto.
Trivialmente Γ es infinito. Sin embargo, la valuación v definida como $v(p_j)=1$ para toda variable $p_j \in Var$, <u>satisface a</u> Γ.

c) Verdadero. Razonemos por el absurdo.
Sea $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ infinito discreto.
Supongamos que $\Gamma' = \{\neg\varphi : \varphi \in \Gamma\}$ <u>es insatisfacible</u>.
Por el teorema de compacidad, hay un $\Gamma_0 \subset \Gamma'$ finito insatisfacible. Supongo que tiene la negación de las primeras "n" fórmulas de Γ. Si no fuera así,
(determinado por el teorema, no cualquiera).

completo los "agujeros" que haya, conservando la insatisfabilidad del conjunto. Esto es simplemente para hacer más simple la notación.

$$\Gamma_0 = \{\neg\varphi_1, \neg\varphi_2, \neg\varphi_3, \dots, \neg\varphi_n\} \subset \Gamma' \text{ insat.}$$

Luego $(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 \wedge \dots \wedge \neg\varphi_n)$ es contradicción, que es equivalente a $\neg(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n)$. Esto es contradicción sii $(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n)$ es tautología.

Por ser $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}, \dots\}$ discreto, hay una valuación que satisface a φ_{n+1} pero no a todas las demás. Sea v dicha valuación.

$\Rightarrow v(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n) = \text{máx}\{v(\varphi_i) : i \in \{1 \dots n\}\} = \underline{0}$

Pero $(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n)$ era tautología.

$\Rightarrow$ ABSURDO!

Luego Γ' es satisfacible.

Quod erat demonstrandum.

NOTA

01/06/18

③ $\mathcal{L} = \{ c, q, *, P, = \}$

$$\varphi : \forall x \forall y \forall z \Big(\big(y = q(x) \land z = q(x * c) \big) \Rightarrow \exists w \big(\neg P(w) \land w * y = z \big) \Big)$$

a) Términos

- Variables : y, x, z, w
- Constantes : c
- Otros : $q(x), q(x*c), x*c, w*y$

i) $\cancel{X_1 =} x$, $X_2 = q(x)$ ✓ etc

ii) $x, c, x*c, q(x*c)$ ✓

iii) $x, c, x*c$ ✓

iv) $w, y, w*y$ ✓

Fórmulas atómicas

$y = q(x)$, $z = q(x*c)$, $P(w)$, $w*y = z$

Cadena final

$X_1 =$ $y = q(x)$

$X_2 =$ $z = q(x*c)$

$(y = q(x) \land z = q(x*c))$

$P(w)$

$\neg P(w)$

$w*y = z$

$(\neg P(w) \land w*y = z)$

$\exists w \, (\neg P(w) \land w*y = z)$

$((y = q(x) \land z = q(x*c)) \Rightarrow \exists w (\neg P(w) \land w*y = z)$

$X_3 = (X_1 \land X_2)$ etc

(sigue al dorso)

$\forall z \, \big((y = q(x) \wedge z = q(x * c)) \Rightarrow \exists w \, (\neg P(w) \wedge w * y = z) \big)$

$\forall y \forall z \, \big((y = q(x) \wedge z = q(x * c)) \Rightarrow \exists w \, (\neg P(w) \wedge w * y = z) \big)$

$\forall x \forall y \forall z \, \big((y = q(x) \wedge z = q(x * c)) \Rightarrow \exists w \, (\neg P(w) \wedge w * y = z) \big)$

Sí, φ es un enunciado ya que es una fórmula sin variables libres.

b) $I = (\mathbb{Z}, 1, q_I, +, P_I)$

- $q_I(x) = x^2$
- $P_I(x)$ sii x es par

Salteo algunos pasos para que no sea eterno...

- $V_I(\varphi) = V_I\big(\forall x \forall y \forall z \, ((y = x^2 \wedge z = (x+1)^2) \Rightarrow \exists w \, (\neg Par(w) \wedge w + y = z))\big)$

$$= \min_{x,y,z} \left\{ \max \left(\begin{array}{l} 1 - V_I(y = x^2 \wedge z = (x+1)^2), \\ V_I(\exists w \, (\neg Par(w) \wedge w + y = z)) \end{array} \right) \right\}$$

$$= \min_{x,y,z} \left\{ \max \left(\begin{array}{l} 1 - \min\left(V_I(y = x^2), V_I(z = (x+1)^2)\right), \\ \max\limits_{w} \left\{ V_I(\neg Par(w) \wedge w + y = z) \right\} \end{array} \right) \right\}$$

$$= \min_{x,y,z} \left\{ \max \left(\begin{array}{l} 1 - \min\left(V_I(y = x^2), V_I(z = (x+1)^2)\right), \\ \max\limits_{w} \left\{ \min\left(1 - V_I(Par(w)), V_I(w + y = z)\right) \right\} \end{array} \right) \right\}$$

Veamos que $V_I(\varphi) = 1$. Supongamos que no. Es decir, $V_I(\varphi) = 0$.

Luego hay una tripla x, y, z que hacen cero al argumento. Si esto es así, las dos partes del "máx(…,…)" de adentro son cero.

Para la primera parte, eso implica que el mínimo es 1. Es decir que $V_I(y = x^2) = 1$ y $V_I(z = (x+1)^2) = 1$.

Para la segunda parte, si todo eso es cero significa que todo $w \in \mathbb{Z}$ hace que $V_I(Par(w)) = 1$ ó que $V_I(w + y = z) = 0$.

Sin embargo, si defino w como $w = z - y$, este w cumple que $V_I(w + y = z) = 1$. Además, porque $V_I(y = x^2) = 1$ y $V_I(z = (x+1)^2) = 1$, sé que vale que:

- $w = (x+1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$

Si $w = 2x + 1$, entonces w es impar: $V_I(Par(w)) = 0$.

Hallé un w / $V_I(Par(w)) = 0$ y $V_I(w + y = z) = 1$.

Volviendo atrás en el razonamiento, esto concluye en un absurdo, que implica que $V_I(\varphi) = 1$ ✓

Como $V_I(\varphi) = 1$, I es un modelo para φ.

Quod erat demonstrandum.

c) Propongo la interpretación $I = (\mathbb{Z}, 0, q_I, *, P_I)$

En donde:

- $q_I(x) = 0$
- $x * y = 0$
- $P_I(x) \Leftrightarrow$ "los perros ladran".

▸ $V_I(\varphi) = V_I\Big(\forall x \forall y \forall z \big((y=0 \land z=0)$

$\Rightarrow \exists w\,(\neg\text{"los perros ladran"} \land 0 = z)\big)\Big)$

Siguiendo un razonamiento parecido al anterior (pero en menos detalle por ser análogo en muchos sentidos), podemos probar que $V_I(\varphi)=0$ suponiendo que $V_I(\varphi)=1$.

En tal caso, todas las triplas $x, y, z \in \mathbb{Z}$ satisfacen la propiedad. Particularmente cuando $x=42$, $y=0$, $z=0$.

Si $z=0, y=0$, luego para que se satisfaga la condición debe cumplirse que $\exists w\,(\neg\text{"los perros ladran"} \land 0=z)$.

__Absurdo__, pues $0=z$ para todo w, pero $V_I(\neg\text{"los perros ladran"})$ será siempre cero: los perros ladran para cualquier $w \in \mathbb{Z}$.

Si $V_I(\varphi) = 0$, luego $V_I(\neg\varphi) = 1-0 = 1$

Es decir, I es un modelo de $\neg\varphi$.

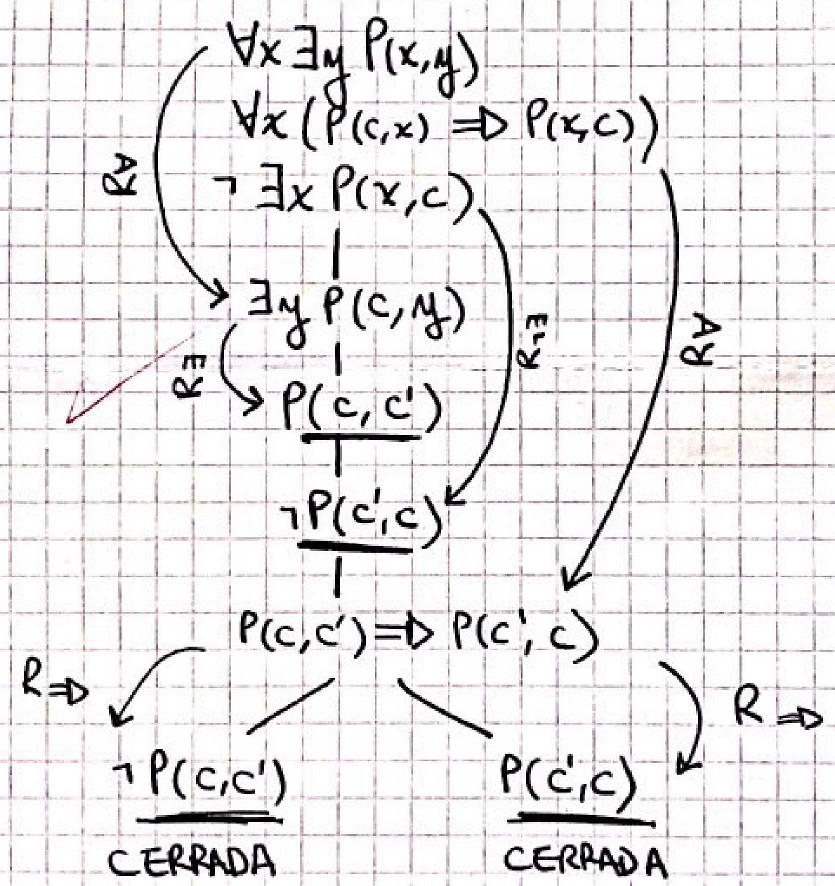
Puede verse que φ no es contradicción ni universalmente válida, ya que vimos dos interpretaciones que le dan un valor de verdad distinto.

(4) • $\Gamma = \{ \forall x \exists y P(x,y), \forall x(P(c,x) \Rightarrow P(x,c)) \}$

P es binario, y $\varphi = \exists x P(x,c)$.

Quiero ver que $\Gamma \models \varphi$.

Para ello, demostraré que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es una contradicción, usando árboles:



Como el conjunto $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ admite un árbol de refutación cerrado, el conjunto es una contradicción.

Luego, $\Gamma \models \varphi$.

Quod erat demonstrandum.

NOTA